$\Rightarrow P_n \xrightarrow{Ε.Ο.} f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow P_n \Longrightarrow f.$ $\square$

13 - 1 - 22

Φυλλαδιο 3ο

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αυξουσα. Νδο το συνολο των σημειων ασυνεχειας της f είναι το πολύ αριθμησιμο.

<u>Λυση</u>/ $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to \xi^-} f(x) \leq \lim_{x \to \xi^+} f(x)$.

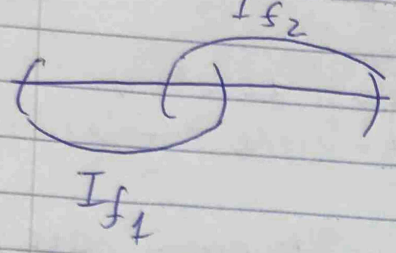
Αν A το συνολο των σημειων ασυνεχειας της f. Τοτε $A = \{\xi \in \mathbb{R} : \lim_{x \to \xi^-} f(x) < \lim_{x \to \xi^+} f(x)\}$. Θετουμε

$I_\xi = (\lim_{x \to \xi^-} f, \lim_{x \to \xi^+} f)$ $\xi \in \mathbb{R}$

Ισχ: $I_{f_1} \cap I_{f_2} = \emptyset$, αν $f_1 \neq f_2$.

Αποδ/ Εστω ότι $f_1 < f_2$. Εστω ότι $I_{f_1} \cap I_{f_2} \neq \emptyset$

Τοτε ισχύει $\lim_{x \to f_1^-} f \le \lim_{x \to f_2^-} f$ (f αυξουσα)



, αρα ισχύει $\lim_{x \to f_2^-} f < \lim_{x \to f_1^+} f$

Εστω $f_1 < y < f_2 \xrightarrow{f \uparrow} \lim_{x \to f_1^+} f \le f(y) \le \lim_{x \to f_2^-} f$,

ατοπο, καθως υποθεσαμε $\lim_{x \to f_2^-} f < \lim_{x \to f_1} f$

Αρα προκύπτει $A = \{ f \in \mathbb{R} : I_f \neq 0 \}$.

Τωρα εστω οικογενεια $\mathcal{A} := \{ I_f \}_{f \in A}$

η οποια είναι οικογενεια ξενων ανα 2 διαστηματων $\xrightarrow[\text{Ασκ 2}]{}$ $\mathcal{A}$ το πολύ αριθμησιμη $\Rightarrow$ A αριθμ.

(6) $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$, f_n φραγμ., $\forall n \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ φραγμενη;

Λυση/ Αφου $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$, $\{f_n\}$ ομοιομορφα Cauchy

που σημαίνει $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τω. $\forall m, n \ge n_0$

$\| f_m - f_n \|_\infty < 1 (= \varepsilon)$

~~Βάζω όπου n το n_0 , άρα.~~

~~$\Rightarrow \|f_{n_0} - f_n\|_\infty < 1 \Rightarrow \|f_n\|_\infty < \|f_{n_0}\| + 1, \forall n \geq n_0$~~

Άλλος τρόπος. $\|f\|_\infty = \|(f - f_{n_0}) + f_{n_0}\| \leq$

$\leq \|f - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0}\| < +\infty$, άρα.

$\|f - f_n\| \to 0$ (άρα συγκλίνει, άρα είναι φραγμένη)

(7) $\{f_n\}, \{g_n\}$ ομ. φραγμένες, $f_n \xrightarrow{ομ} f$, $g_n \xrightarrow{ομ} g$

ΝΔΟ $f_n g_n \xrightarrow{ομ} f \cdot g$

Λύση/ $\|f \cdot g - f_n \cdot g_n\|_\infty = \|(fg - fg_n) + (fg_n - f_n \cdot g_n)\|_\infty$

$\leq \|f(g - g_n)\|_\infty + \|g_n (f - f_n)\|_\infty \leq$

$\leq \underbrace{\|f\|_\infty}_{<\infty} \underbrace{\|g - g_n\|_\infty}_{\to 0} + \underbrace{\|g_n\|_\infty}_{\leq M} \underbrace{\|f\|_\infty}_{\to 0} \to 0$.

(8) $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$

ΝΔΟ $f_n \xrightarrow{ομ} f$, $f_n^2 \not\xrightarrow{ομ} f^2$

Λύση/ $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$

$\|f_n^2 - f^2\|_\infty = \|\cancel{x^2} + 2\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} - \cancel{x^2}\| =$

$= \|2\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}\| =$ (Το x τρέχει το n δεν τρέχει ακόμα)

$= +\infty \not\to 0$

⑨ (X,d) συμπαγής f, $f_n : X \to \mathbb{R}$, τ.ω.
συνεχής.
$\forall \{x_n\} \subseteq X$ συγκλίνουσα, $f_n(x_n) \to f(\lim_n x_n)$
ΝΔΟ $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$

Λύση

Έστω $f_n \not\xrightarrow{\text{ομ}} f \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \geq n_0)$ τ.ω. $(\exists x_n \in X)$
$(|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon)$

$\Rightarrow \exists \{x_n\} \subseteq X$, τ.ω. $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$.

(Αφού X συμπαγής) $\Rightarrow$ B-W / $\exists \{x_n\}$ τ.ω. $x_{k_n} \to x \in X \Rightarrow$

$\underset{\text{συνεχής}}{\overset{f}{\Rightarrow}} f(x_{k_n}) \to f(x) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω.

$\forall n \geq n_0$, $|f(x_{k_n}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$|f_{k_n}(x_{k_n}) - f(x)| = |f_{k_n}(x_{k_n}) - f(x_{k_n}) +$
$+ f(x_{k_n}) - f(x)| \geq ||f_{k_n}(x_{k_n}) - f(x_{k_n})| -$
$- |f(x_{k_n}) - f(x)|| \Rightarrow |f_{k_n}(x_{k_n}) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

$\Rightarrow f_{k_n}(x_{k_n}) \not\to f(x)$, άτοπο.

$\boxed{\text{Φυλλαδιο 4}}$

① f_n συνεχής, τω $f_n|_K \xrightarrow{ομ} f|_K$, $\forall K \subseteq X$ κ συμπαγές. Νδο f συνεχής.

Λύση/ Εστω $\{x_n\} \subseteq X$, τ.ω. $x_n \to x \in X$

Θετω $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ συμπαγές.

f_n συνεχής $\Rightarrow$ $f_n|_K$ συνεχής $\xrightarrow{f_n|_K \xrightarrow{ομ} f|_K}$

$\Rightarrow$ $f|_K$ συνεχής $\Rightarrow$ $\{y_n\} \subseteq K$, τ.ω.

$y_n \to y \in K$, $f(y_n) \to f(y)$ $\Rightarrow$ $f(x_n) \to f(x) =$

$= f(\lim_n x_n)$, $\forall$ συγκλινουσα ακολουθια $\{x_n\} \subseteq X$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f συνεχης στο X.

② $f_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, f_n συνεχείς, $f_n \xrightarrow{ομ} f$

Αν $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subseteq [\alpha, \beta]$, τ.ω. $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$

Νδο $$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f_n \longrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f.$$

Λύση/ $$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f_n = \int_{\alpha}^{\beta} f_n - \int_{\alpha}^{\alpha_n} f_n - \int_{\beta_n}^{\beta} f_n.$$

Αρκει νδο $$\int_{\alpha}^{\alpha_n} f_n, \int_{\beta_n}^{\beta} f_n \longrightarrow 0$$

$\kappa' \|f_n - f\|_\infty \to$ φραγμένη

Ξέρω από υπόθεση

$$\|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \xRightarrow[\text{συνεχής}]{f}$$

$\|f_n\|_\infty \leq M$. , άρα.

$$\left| \int_a^{a_n} f_n(x)\,dx \right| \leq \int_a^{a_n} |f_n(x)|\,dx \leq M \int_a^{a_n} 1\,dx$$

$$= M(a_n - a) \to 0 \quad , \text{αντ.} \quad (b_n - b).$$

(4) $\int_a^b x^n f(x) = 0$, με f συνεχή.

ΝΔΟ $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$

Αποδ/ Έστω $P(x)$ πολυώνυμο. Τότε $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$$\Rightarrow \int_a^b P(x) f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b x^n f(x)\,dx = 0.$$

• f συνεχής $\xRightarrow{S-W}$ $\exists \{P_n\}$ πολυωνύμων, ώστε $P_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$

$\Rightarrow P_n \cdot f \xrightarrow{\text{ομ}} f^2$. $\Rightarrow$

(Αφού και οι δύο είναι φραγμένες, ισχύει από ασκ 7)

$$\Rightarrow \; 0 = \int_a^B p_n f \to \int_a^B f^2 \Rightarrow \int_a^B f^2 = 0.$$

$$\xRightarrow[\text{συνεχής}]{f} f(x) = 0, \quad \forall x \in [a, B] \to \text{απο ΑΠΕΙ II}$$

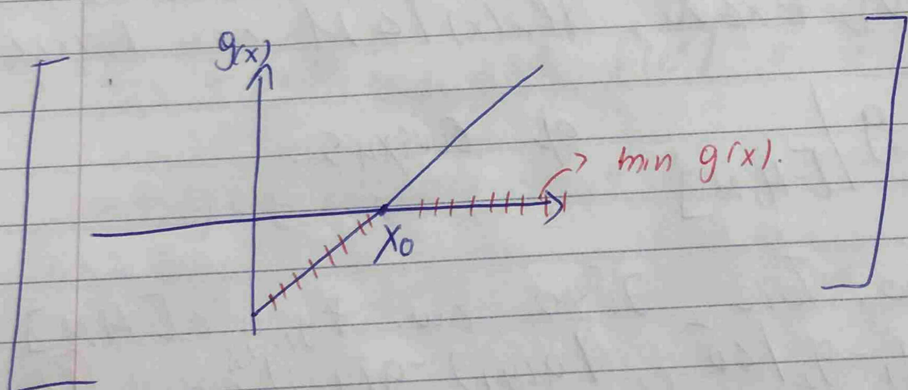
(5) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, τω. $\int_0^1 f \cdot g = 0$, $\forall g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

της μορφης $g(x) = \min\{ax+b, cx+d\}$.

<u>Λύση</u>/ (ΔΕΝ ΜΠΟΡΩ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΩ S-W).

Θέτουμε $g(x) = \min\{(x - x_0), 0\}$, $x_0 \in [0,1]$

$$\Rightarrow \; 0 = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx \quad \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \int_0^{x_0} (x - x_0) \cdot f(x)\, dx, \quad \forall x_0 \in [0,1]. \Rightarrow$$

$$\overset{x_0 = t}{\Rightarrow} \int_0^t (x - t) f(x)\, dx = 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

$$\Rightarrow \int_0^t x f(x)\,dx = t\int_0^t f(x)\,dx \iff$$

$$\iff \left(\int_0^t x f(x)\,dx\right)' = \left(t\int_0^t f(x)\,dx\right)'$$

$$\iff \cancel{t f(t)} = \int_0^t f(x)\,dx + \cancel{t f(t)}$$

$$\iff \left(\int_0^t f(x)\,dt\right)' = 0 \iff f(t) = 0.$$

$\forall t \in [0,1]$.

(10) $f_n \xrightarrow{o\mu} f$, $\{f_n\}$ ομ. φραγμένη.
Νδο αν $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε $g \circ f_n \xrightarrow{o\mu} g \circ f$

Λύση) $\{f_n\}$ ομ. φραγμένη $\Rightarrow \exists M > 0$, τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$, $|f_n(x)| < M \iff f_n(x) \in [-M, M]$

όμως $g\big|_{[-M,M]}$ ομ. συνεχής.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists \delta > 0$, τ.ω. $\forall y_1, y_2 \in [-M,M]$ τ.ω. $|y_1 - y_2| < \delta$, $|g(y_1) - g(y_2)| < \varepsilon$. (1)

(Για $\varepsilon = \delta$): $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in X$

$|f_n(x) - f(x)| < \delta$., για $y_1 = f_n(x)$, $y_2 = f(x)$

$\xrightarrow{(1)} |g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$. ∎

5º φυλλαδιο

① $F = [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, συνεχής, $\{f_n\}$ ισοσυνεχής στο 1, όπου $f_n(x) = F(x^n)$. Νδο F σταθερη.

Λύση/ Εστω $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, τω. $\forall y \in (1-\delta, 1+\delta)$

$|f_n(1) - f_n(y)| < \varepsilon$
$\parallel$
$|F(1) - F(y^n)| < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Εστω $x \in \mathbb{R}$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $1 + \frac{x}{n} \in (1-\delta, 1+\delta)$

Θετω $y := 1 + \frac{x}{n}$, αρα.

$|F(1) - f(1+\frac{x}{n})^n| < \varepsilon$.

$\cdot \ (1+\frac{x}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e^x \underset{\text{συνεχης}}{\overset{f}{\Rightarrow}} |F(1) - f(e^x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $\forall \varepsilon > 0$

$\overset{\varepsilon \to 0}{\Rightarrow} \forall x \in \mathbb{R}$, $f(1) = f(e^x) \overset{y = e^x}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow y \in (0,+\infty)$, $\to$ ($y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$, $(0,+\infty)$.

$\Leftrightarrow F(y) = f(1)$, $\forall y \in [0,+\infty)$.

② $f_n : [a,B] \to \mathbb{R}$, $\{f_n\}$ ομ. φραγμενη

$g_n(x) := \int_a^x f_n(t)\,dt$, $x \in [a,B]$. Νδο $\{g_n\}$ εχει ομ. συγκλινουσα υπακολουθια.

→ Πόρισμα A.A

Λύση / Αρκεί νδο $\{g_n\}$ ισοσυνεχής κ' ομ. φραγμένη

- $\exists M>0$, τ.ω. $|f_n(x)| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a,B]$

$$\Rightarrow |g_n(x)| \leq \int_a^x |f_n(t)|\,dt \leq \int_a^x M\,dt =$$

$$= M(x-a) \leq M(B-a), \quad \forall x \in [a,B]$$

- Τώρα θνδο g ισοσυνεχής.

Έστω $\varepsilon>0$ κ' $x \in [a,B]$. Τότε,

$$|g_n(x)-g_n(y)| = \left|\int_x^y f_n(t)\,dt\right| \leq M|x-y|$$

Για $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$: $\forall x,y \in [a,B]$, $|x-y|<\delta$

ισχύει $|g_n(x)-g_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \{g_n\}$ ισοσυνεχής στο $x \underset{\text{τυχον}}{\overset{x}{\Rightarrow}}$ g ισοσυνεχής γενικά

(4) $g_n : [a,B] \to \mathbb{R}$, $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$

$f : X \to [a,B]$. Νδο $g_n \circ f \to g \circ f$.

Λύση / $\|g_n \circ f - g \circ f\|_\infty = \sup_{x \in X} |g_n(f(x)) - g(f(x))|$

$$\leq \sup_{y \in [a,B]} |g_n(y)-g(y)| = \|g_n - g\|_\infty \to 0.$$

15 1

Φυλλαδιο 6

~~Εστω (X,d) μ.χ., A~~

(Η αλγεβρα του συνολου A, είναι η μικροτερη αλγεβρα που περιεχει το A)

Ασκηση ① Εστω (X,d) μ.χ., $f_1, \dots, f_N : X \to \mathbb{R}$
$A := \{\mathbb{1}, f_1, \dots, f_N\}$. Εστω $\mathcal{A}$ η αλγεβρα που παραγεται απο το A. Νδο

$$\mathcal{A} = \{P(f_1, \dots, f_N) : P \in \mathcal{P}_n\}$$

$\mathcal{P}_n$ = Ο χωρος όλων των πολυωνυμων N μεταβλητών.

Λύση $P(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k_1, \dots, k_N \in \{0, \dots, t\}} a_{k_1, \dots, k_N} x_1^{k_1} \cdots x_N^{k_N} \in \mathcal{P}(N)$

Το $\mathcal{A}$ αλγεβρα $\Rightarrow f_1^{k_1} \cdots f_N^{k_N} \in \mathcal{A}, \forall k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}_0$

Αρα το $\mathcal{A}$ γραμ. χώρος $\Rightarrow$ Γρ. συνδιασμοι τετοιων ανηκουν στην $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(f_1, \dots, f_N) \in \mathcal{A} \quad \forall P \in \mathcal{P}_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \boxed{\{P(f_1, \dots, f_n) : P \in \mathcal{P}_n\} =: B}$$

Αρκει νδο B αλγεβρα.

δηλ. • $f \wedge g$
• $f \vee g$

(γραφεται σαν γραμμικος συνδυασμος)

② V ο γρ. χωρος συν/σεων που παραγεται απο τις συν/σεις $\mathbb{1}, \sin x, \sin^2 x, \ldots, \sin^n x, \ldots$ Νδο V αλγεβρα κ' $\overline{V} = C([0,1])$.

Λυση/ Αν $f \in V$, τοτε $\exists\, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

τ.ω. $f = a_0 \mathbb{1} + a_1 \sin x + \ldots + a_n \sin^n x$

Αν $P(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \Rightarrow P(\sin x) = f$.
Αρα $P(\sin x) \in V$, δηλ. δειξαμε.

$\Rightarrow V = \{P(\sin x) : P$ πολυωνυμο μιας μεταβλητης $\}$.

Απο ασκ 1, V αλγεβρα.

Για $\overline{V} = C([0,1])$, χρησιμοποιω S-W
- $\mathbb{1} \in V$
- $\sin x$ 1-1 στο $[0,1] \Rightarrow V$ διαχωριζει τα σημεια στο $[0,1]$. $\overset{S-W}{\Longrightarrow} \overline{V} = C([0,1])$.

④ Νδο η αλγεβρα που παραγεται απο τις $\mathbb{1}, x^2$ ειναι πυκνη $C([0,1])$, αλλα οχι πυκνη στο $C([-1,1])$

Λυση/ $A \ni \mathbb{1}$ κ' $A \ni x^2$ οπου x^2 1-1 $[0,1]$, αρα διαχωριζει τα σημεια του $[0,1] \rightarrow$ $\overline{A} = C([0,1])$

οικογένεια

$\hat{A} \underset{=}{\overset{\alpha\sigma\kappa 1}{}} \{ P(x^2) :$ P πολυωνυμο μιας μεταβλητης $\}$.

$\Rightarrow \forall f \in A$, f αρτια.

$\Rightarrow \forall f \in \bar{A}$, f αρτια

$\Rightarrow f(x) = x \notin \bar{A}$ (αφου x περιττη συναρτηση).

$\Rightarrow \bar{A} \neq C([-1,1])$

SOS Θεωρια: [Αν $\exists$ 1-1 συναρτηση $\in A$, τοτε η A διαχωριζει τα σημεια του συνολου που επιλεγουμε]

③ Εστω (X,d) συμπαγης μχ. Νδο $(C(X), D)$ διαχωρισιμος. (δλδ εχει αριθμησιμο ε' πυκνο υποσυνολο).

Λύση/ (X,d) διαχωρισιμος $\xrightarrow{\text{(απο συμπαγεια)}}$ $\exists \{x_n\} \subseteq X$ τ.ω. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνο στου X.

Θετουμε $f_n(x) = d(x_n, x)$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.

$V :=$ Η αλγεβρα παραγεται απο το συνολο $\{\mathbb{1}, f_1, f_2, \dots\}$

$\overline{\text{Ισχ}}$/: Η V διαχωριζει τα σημεια του X
Εστω $x, y \in X$. Αν $\nexists n \in \mathbb{N}$, τ.ω. $f_n(x) \neq f_n(y)$

Τοτε $d(x_n, x) = d(x_n, y)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνο στο $X \Rightarrow \exists \{y_n\} \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
τ.ω. $y_n \to x$

Ομως $\overset{\nearrow 0}{d(y_n, x)} = d(y_n, y) \Rightarrow d(y_n, y) \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_n \to y \Rightarrow x = y$

$\overset{\text{ΗεV}}{\Rightarrow} \bar{V} = c(x)$.

Ομοια με την ασκ 1: $V = \{P(f_{i_1} \dots f_{iN})\}$.

Ορίζουμε $U = \{P(f_{i_1}, \dots, f_{iN})$